ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Διαφορικός Λογισμός

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Στατιστική

<u>Οδηγός Επιβίωσης</u>

Περιλαμβάνει:

- Ερωτήσεις Θεωρίας
- Όλες τις Αποδείξεις
- Χρήσιμο Τυπολόγιο

Μ. Γιαννόπουλος
ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
2015-16

ΘΕΩΡΙΑ

♦ **Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;**

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

♦ **Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;**

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Παρατήρηση:
Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

♦ **Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;**

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

♦ **Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_2 \in A$;**

Απάντηση:
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

Παρατηρήσεις:
- Ένα **τοπικό ελάχιστο μπορεί** να είναι **μεγαλύτερο** από ένα **τοπικό μέγιστο**.
- Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

♦ Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Παρατηρήσεις:

- Το **χαρακτηριστικό γνώρισμα** μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.
- Οι γνωστές μας συναρτήσεις, **πολυωνυμικές**, **τριγωνομετρικές**, αλλά και **όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών** είναι συνεχείς συναρτήσεις.

♦ Τι ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 και πως συμβολίζεται αυτή;

Απάντηση:

Παράγωγος της f στο x_0 ονομάζουμε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$ και **συμβολίζεται** με $f'(x_0)$. Δηλ., $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$.

Παρατηρήσεις:

- Μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού, όταν το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
- Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_0$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0), και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ **μέγιστο.**
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0), και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ **ελάχιστο.**
- Αν για την f ισχύει $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και **δεν παρουσιάζει ακρότατο** στο διάστημα αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

♦ **Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι 0, δηλαδή $(c)'=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

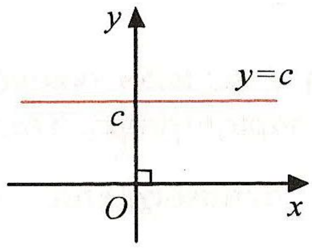
Απάντηση:

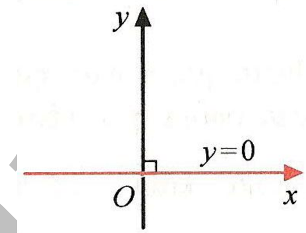
Έχουμε $f(x+h)-f(x)=c-c=0$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.

Άρα $(c)'=0$.





♦ **Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι 1, δηλαδή $(x)'=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

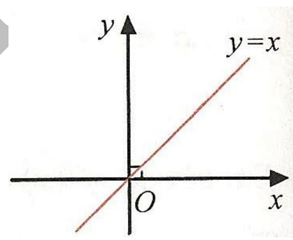
Απάντηση:

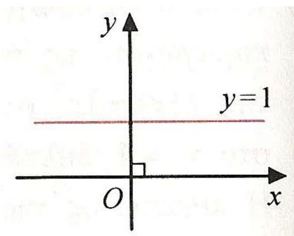
Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$.

Άρα $(x)'=1$.





♦ **Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $2x$, δηλαδή $(x^2)'=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

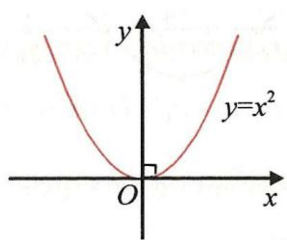
Απάντηση:

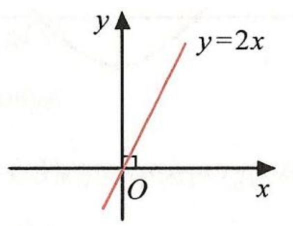
Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2==x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)\cancel{h}}{\cancel{h}}=2x+h$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

Άρα $(x^2)'=2x$.





♦ **Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c πραγματική σταθερά, να αποδείξετε ότι $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

Απάντηση:

Έστω η συνάρτηση $F(x)=c\cdot f(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)=c\cdot\left(f(x+h)-f(x)\right)$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{c\cdot\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}=c\cdot\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\cdot\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=c\cdot f'(x)$.

Άρα $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$.

♦ **Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

Απάντηση:

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)=$

$$=\left(f(x+h)-f(x)\right)+\left(g(x+h)-g(x)\right)$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$.

Άρα $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$.

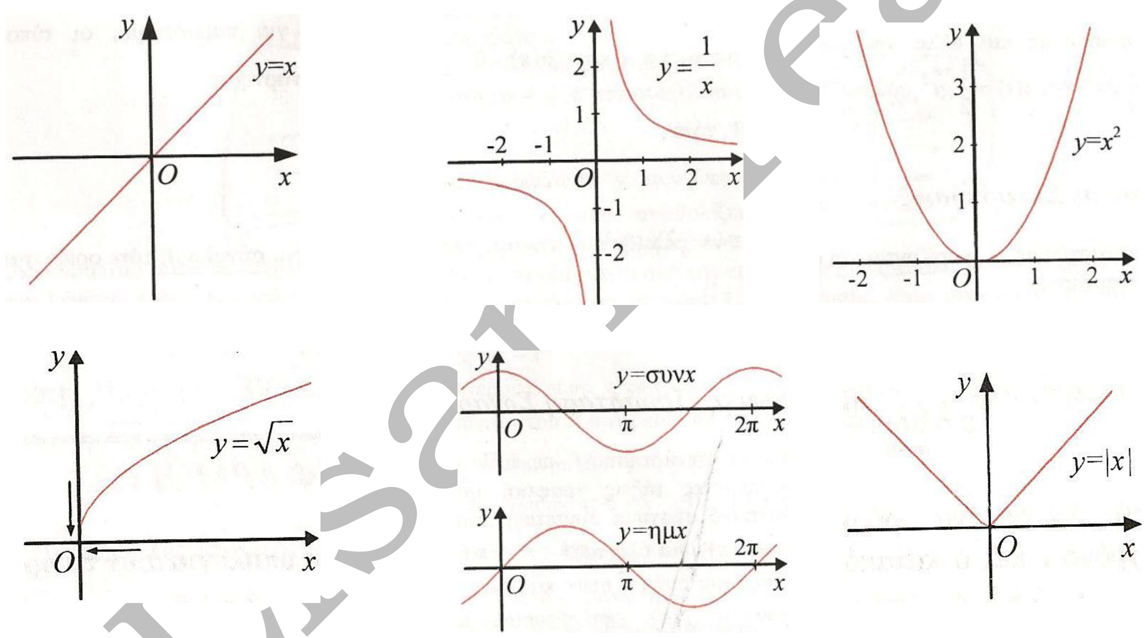
Τυπολογιο

Πράξεις συναρτήσεων

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο Α, τότε ορίζονται οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x),\ x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x),\ x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in A$
- Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ x \in A$ και $g(x) \neq 0$

Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων



Μονοτονία

Αν η f είναι γν. αύξουσα (↗) στο Δ, τότε $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Αν η f είναι γν. φθίνουσα (↘) στο Δ, τότε $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(Ισχύουν και τα αντίστροφα)

Ακρότατα

Αν η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x_1 \in A$, τότε $f(x) \leq f(x_1)$ $\forall x$ σε μια περιοχή του x_1.

Αν η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x_2 \in A$, τότε $f(x) \geq f(x_2)$ $\forall x$ σε μια περιοχή του x_2.

(*Ισχύουν και τα αντίστροφα*)

Όρια

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$, όπου ℓ_1, $\ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε:

~ $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \ell_1 \pm \ell_2$

~ $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

~ $\lim\limits_{x \to x_0} \left(k \cdot f(x) \right) = k \cdot \ell_1$

~ $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^\nu = \ell_1^\nu$

~ $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \ell_1 \cdot \ell_2$

~ $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell_1}$

Συνέχεια

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (*Ισχύει και το αντίστροφο*)

Παράγωγος

Αν το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και ισχύει $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$

Ρυθμός μεταβολής

Παράγωγος της f στο x_0 $\leftrightarrow$ Ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x = x_0$.
Παράγωγος της f στο x_0 $\leftrightarrow$ Συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) της εφαπτομένης της C_f στο x_0.
Παράγωγος της f στο x_0 $\leftrightarrow$ εφω, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο x_0 με τον ημιάξονα Ox.

Θέση – Ταχύτητα – Επιτάχυνση

Αν τη χρονική στιγμή t, η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός κινητού είναι $x(t)$, $\upsilon(t)$ και $\alpha(t)$ αντίστοιχα, τότε ισχύουν: $\upsilon(t) = x'(t)$ και $\alpha(t) = \upsilon'(t) = x''(t)$

Τύποι παραγώγισης

• $(c)' = 0$ • $(x)' = 1$ • $(x^{\rho})' = \rho \cdot x^{\rho-1}$ • $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ • $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	• $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ • $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ • $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ • $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Κανόνες παραγώγισης

- $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$
- $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$
- $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
- $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΩΡΙΑ

♦ Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι μεταβλητές;

Απάντηση:
Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:
1. Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.
2. Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:
   i. Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο ¨μεμονωμένες¨ τιμές.
   ii. Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β).

♦ Τι ονομάζεται συχνότητα ν_i και με τι ισούται το άθροισμα όλων των συχνοτήτων;

Απάντηση:
(Απόλυτη) **συχνότητα** ν_i ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων. Το **άθροισμα όλων των συχνοτήτων** είναι ίσο με το μέγεθος ν, του δείγματος, δηλαδή: $\nu_1+\nu_2+...+\nu_\kappa=\nu$.

♦ Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i; Ποιες είναι οι ιδιότητες της σχετικής συχνότητας;

Απάντηση:
Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** f_i της τιμής x_i, δηλαδή $f_i=\dfrac{\nu_i}{\nu}$, $i=1,2,...,\kappa$.

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:
i) $0\le f_i\le 1$ για $i=1,2,...,\kappa$
ii) $f_1+f_2+...+f_\kappa=1$

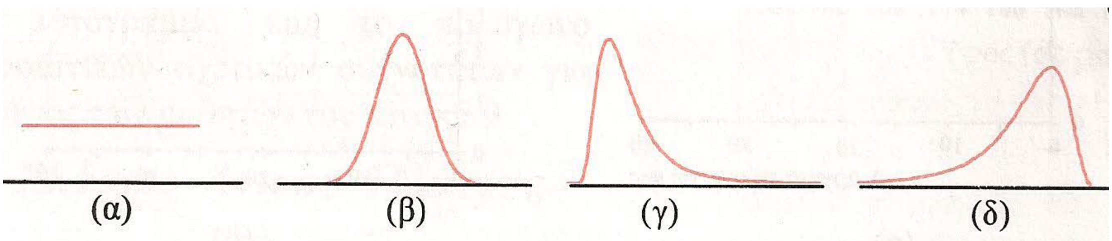
Διαγράμματα – Πολύγωνα:
- Το **ραβδόγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.
- Το **διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.
- Ενώνοντας τα σημεία (x_i,ν_i) σε ένα διάγραμμα συχνοτήτων ή (x_i,f_i) σε ένα διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων έχουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο**

σχετικών συχνοτήτων, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε.

- Το **κυκλικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.
- Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα**, στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα.
- Το **χρονόγραμμα** ή **χρονολογικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους.
- **Ιστόγραμμα** συχνοτήτων ονομάζεται η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα.
- Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων**. Το **εμβαδόν του χωρίου** που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν. Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων με εμβαδόν ίσο με 1.
- Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα δεξιά άκρα (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** της κατανομής.

♦ **Ποιες κατανομές συχνοτήτων γνωρίζετε;**

Απάντηση:
Η κατανομή (β), με ¨κωδωνοειδή¨ μορφή λέγεται **κανονική κατανομή** και παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική. Όταν οι παρατηρήσεις ¨κατανέμονται¨ ομοιόμορφα σε ένα διάστημα [α, β], όπως στην κατανομή (α), η κατανομή λέγεται **ομοιόμορφη**. Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται ασύμμετρη και θετική ασυμμετρία όπως στην κατανομή (γ) ή αρνητική ασυμμετρία όπως στην κατανομή (δ).



♦ Ποια είναι τα ποιο συνηθισμένα μέτρα θέσης;

Απάντηση:
Τα πιο συνηθισμένα μέτρα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ενός συνόλου δεδομένων πάνω στον οριζόντιο άξονα Ox, εκφράζοντας την ¨κατά μέσο όρο¨ απόστασή τους από την αρχή των αξόνων, είναι ο **αριθμητικός μέσος** ή **μέση τιμή**, **η διάμεσος** και η **κορυφή** ή **επικρατούσα τιμή**.

♦ Τι ονομάζουμε μέση τιμή;

Απάντηση:
Η **μέση τιμή** ενός συνόλου ν παρατηρήσεων αποτελεί το σπουδαιότερο και χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων, δηλ. $\bar{x}=\frac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i$.

Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1,x_2,...,x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες $\nu_1,\nu_2,...,\nu_\kappa$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+...+x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1+\nu_2+...+\nu_\kappa}=\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i}{\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i \text{ .}$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται: $\bar{x}=\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\frac{\nu_i}{\nu}=\sum_{i=1}^{\kappa}x_if_i$, όπου f_i οι σχετικές συχνότητες.

Παρατήρηση:
Η μέση τιμή **επηρεάζεται** από τις **ακραίες παρατηρήσεις**.

♦ Τι ονομάζουμε σταθμικό μέσο;

Απάντηση:
Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα στις τιμές $x_1,x_2,...,x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο**. Εάν σε κάθε τιμή $x_1,x_2,...,x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1,w_2,...,w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+...+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+...+w_\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}$$

♦ **Τι ονομάζουμε διάμεσο (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;**

Απάντηση:
Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Παρατηρήσεις:
- Η διάμεσος **δεν επηρεάζεται** από τις **ακραίες παρατηρήσεις**.
- Η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία **το πολύ 50%** των παρατηρήσεων είναι **μικρότερες από αυτήν** και **το πολύ 50%** των παρατηρήσεων είναι **μεγαλύτερες από την τιμή αυτή**.

♦ **Τι ονομάζουμε μέτρα διασποράς και ποια είναι τα σπουδαιότερα;**

Απάντηση:
Τα **μέτρα διασποράς** εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το **εύρος**, η **ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση**, η **διακύμανση** και η **τυπική απόκλιση**.

♦ **Τι ονομάζουμε εύρος;**

Απάντηση:
Το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς είναι το **εύρος** ή **κύμανση** (R), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή:

Εύρος R = Μεγαλύτερη παρατήρηση – Μικρότερη παρατήρηση

Παρατήρηση:
Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο, που **υπολογίζεται εύκολα**, **δε θεωρείται** όμως **αξιόπιστο** μέτρο διασποράς, γιατί **βασίζεται μόνο** στις **ακραίες παρατηρήσεις**.

♦ **Τι ονομάζουμε διακύμανση;**

Απάντηση:
Ως ένα μέτρο διασποράς παίρνουμε το μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$. Το μέτρο αυτό καλείται **διακύμανση** ή **διασπορά** (variance) και ορίζεται από τη σχέση: $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$.

Ο τύπος αυτός παίρνει την ισοδύναμη μορφή: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$, η οποία διευκολύνει

σημαντικά τους υπολογισμούς κυρίως όταν η μέση τιμή $\bar{x}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός.
Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα, η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση: $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$ ή την ισοδύναμη μορφή: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$,

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$.

Παρατήρηση:
Η διακύμανση είναι μια **αξιόπιστη παράμετρος** διασποράς, αλλά έχει ένα **μειονέκτημα**. **Δεν εκφράζεται** με τις **μονάδες** με τις οποίες εκφράζονται οι **παρατηρήσεις**. Για παράδειγμα, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm, η διακύμανση εκφράζεται σε cm^2.

♦ Τι ονομάζουμε τυπική απόκλιση;

Απάντηση:
Αν πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, έχουμε ένα άλλο μέτρο διασποράς που ονομάζεται **τυπική απόκλιση**, συμβολίζεται με s και δίνεται από τη σχέση: $s = \sqrt{s^2}$.

Παρατήρηση:
Η τυπική απόκλιση **εκφράζεται** με την **ίδια μονάδα μέτρησης** του χαρακτηριστικού.

♦ Τι γνωρίζεται για την κανονική κατανομή;

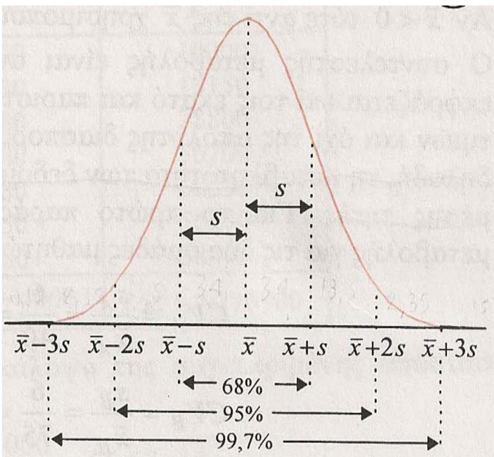
Απάντηση:
Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι **κανονική** ή **περίπου κανονική**, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i) το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$

ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$

iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

iv) το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$



♦ **Τι ονομάζουμε συντελεστή μεταβολής;**

Απάντηση:

Ένα μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας**, ο οποίος ορίζεται (για $x \neq 0$) από το λόγο: $CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\overline{x}}$

Αν $\overline{x} < 0$ τότε αντί της $\overline{x}$ χρησιμοποιούμε την $|\overline{x}|$.

Παρατήρηση:

Ο συντελεστής μεταβολής είναι **ανεξάρτητος** από τις **μονάδες μέτρησης**, εκφράζεται **επί τοις εκατό** και παριστάνει ένα **μέτρο σχετικής διασποράς** των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς.

♦ **Πότε ένα δείγμα είναι ομοιογενές;**

Απάντηση:

Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι **ομοιογενές**, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%, δηλ. $CV \leq 10\%$.

Παρατήρηση:

Μεταξύ δύο δειγμάτων **μεγαλύτερη ομοιογένεια** έχει εκείνο το δείγμα με το **μικρότερο συντελεστή μεταβολής**.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

♦ **Να αποδείξετε ότι** $0 \le f_i \le 1$ **για** $i = 1,2,...,\kappa$ **.**

Απάντηση:

Από τον τύπο της σχετικής συχνότητας $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$, $i = 1,2,...,\kappa$ ισχύει $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,...,\kappa$ αφού $0 \le \nu_i \le \nu$.

♦ **Να αποδείξετε ότι** $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$ **.**

Απάντηση:

$$f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

♦ **Έστω** $t_1, t_2, ..., t_\nu$ **οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής** X **ενός δείγματος μεγέθους** ν**, που έχουν μέση τιμή** $\bar{x}$ **. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών** $t_1 - \bar{x}$**,** $t_2 - \bar{x}$**,...,** $t_\nu - \bar{x}$ **είναι ίσος με μηδέν.**

Απάντηση:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + ... + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} - \frac{\cancel{\nu} \cdot \bar{x}}{\cancel{\nu}} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Τυπολογιο

Πίνακες κατανομής συχνοτήτων

~ $\nu_1+\nu_2+...+\nu_\kappa=\nu$ ~ $f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$ ~ $f_1+f_2+...+f_\kappa=1$

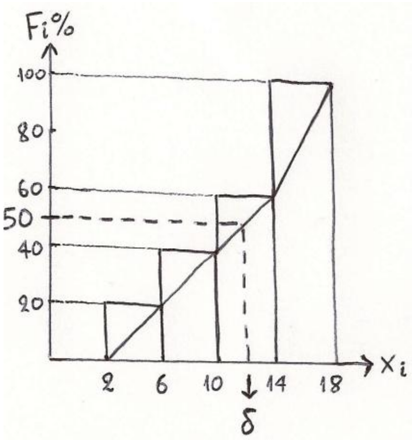
~ $N_i=\nu_1+\nu_2+...+\nu_i$ ~ $0\le f_i\le 1$ ~ $F_i=f_1+f_2+...+f_i$

~ $\nu_1=N_1$ ~ $f_i\%=100\cdot f_i$ ~ $f_1=F_1$

Τόξο κυκλικού τμήματος σε κυκλικό διάγραμμα

$$\alpha_i=\nu_i\frac{360°}{\nu}=360° f_i$$

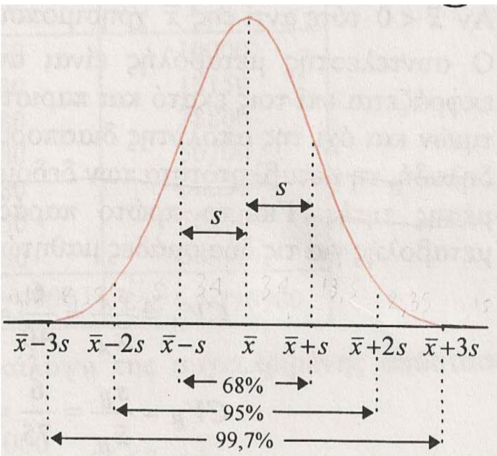
Μέτρα θέσης

	Αναλυτικά Τιμές	Πινακάκι	Ομαδοποίηση
Μέση τιμή $\bar{x}$	$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}$	$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\nu}=\sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$	
		Σταθμικός Μέσος: $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i\nu_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$	
Διάμεσος δ	*Γράφουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά!* ~ Αν ν περιττός, η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση. ~ Αν ν άρτιος, η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.		*Κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθρ. σχετικών συχνοτήτων %* $(F_i\%)$ 

Μέτρα διασποράς

	Αναλυτικά Τιμές	Πινακάκι	Ομαδοποίηση
Εύρος R	$R = t_{\max} - t_{\min}$		Ανώτερο όριο τελευταίας τάξης – κατώτερο όριο πρώτης τάξης
Διακύμανση s^2	$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i - \bar{x}\right)^2$ $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$ ↓ *(δίνεται)*	$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \nu_i$ $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^{\,2}\nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$ ↓ *(δίνεται)*	
Τυπική απόκλιση s	$s = \sqrt{s^2}$		

Κανονική κατανομή



$\left(R \approx 6s\right)$

Συντελεστής μεταβολής

$CV = \frac{s}{\bar{x}}$ ή $CV = \frac{s}{\left|\bar{x}\right|}$ (αν $\bar{x} < 0$)

(Αν $CV \leq 10\%$, τότε το δείγμα είναι ομοιογενές)

Βασική εφαρμογή

~ Αν $y_i = x_i + c$, τότε: $\bar{y} = \bar{x} + c$ και $s_y = s_x$

~ Αν $y_i = c \cdot x_i$, τότε: $\bar{y} = c \cdot \bar{x}$ και $s_y = \left|c\right| \cdot s_x$