ΟΛΗ Η ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΣΕ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ -ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. **Τι ονομάζουμε συνάρτηση ; Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής;**

Απάντηση

Συνάρτηση *από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β είναι μια διαδικασία με την οποία* **κάθε στοιχείο** *ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε* **ένα ακριβώς στοιχείο** *κάποιου άλλου συνόλου Β.*

Αν $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ *η συνάρτηση f λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής .*

2. **Τι λέγεται τιμή μίας συνάρτησης** f **στο** x**;**

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ *αντιστοιχίζεται στο* $y \in B$*, τότε γράφουμε*

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε "y ίσον f του x". Το $f(x)$ *λέγεται* **τιμή της** f **στο** x.

3. **Έστω μια συνάρτηση** f **με πεδίο ορισμού το** A**. Τι ονομάζεται εξαρτημένη και τι ανεξάρτητη μεταβλητή της** f**;**

Απάντηση

Αν με τη συνάρτηση f το $x \in A$ *αντιστοιχίζεται στο* $y \in B$*, τότε γράφουμε*

$y = f(x)$ *Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του Α, ονομάζεται* **ανεξάρτητη μεταβλητή**, *ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, λέγεται* **εξαρτημένη μεταβλητή**.

4. **Έστω οι συναρτήσεις** f, g **που ορίζονται σε ένα σύνολο** A **. Πως ορίζονται**
I. Το άθροισμα $S = f + g$**; II. Η διαφορά** $D = f - g$**; III. Το γινόμενο** $P = f\ g$**; IV. Το πηλίκο** $R = f/g$**;**

Απάντηση

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο Α, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- *Το άθροισμα* $S = f + g$, *με* $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- *Η διαφορά* $D = f - g$, *με* $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- *Το γινόμενο* $P = f \cdot g$, *με* $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ *και*
- *Το πηλίκο* $R = \dfrac{f}{g}$, *με* $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *όπου* $x \in A$ *και* $g(x) \neq 0$.

5. **Έστω μια συνάρτηση** f **με πεδίο ορισμού ένα σύνολο** A**. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση ή καμπύλη της** f **σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** Oxy **;**

Απάντηση

Γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy *λέγεται το σύνολο των σημείων* $M(x, (f(x))$ *για όλα τα* $x \in A$.

6. Πότε ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης f;

Απάντηση

Ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν $y = f(x)$.

7.Τι ονομάζεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Απάντηση

Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της** *f.*

8.Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** *σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$,*

9.Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** *στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$*

10.Τι ονομάζουμε περιοχή του x_1;

Απάντηση

περιοχή *του x_1.ονομαζουμε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1,*

11.I. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

II. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $x_2 \in A$;

Απάντηση

I)Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **Τοπικό μέγιστο** *στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και* **τοπικό ελάχιστο** *στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2*

ii))Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** *στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2*

12.Τι ονομάζονται ακρότατα μίας συνάρτησης ;

Απάντηση

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** *της συνάρτησης.*

13.Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ *και* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ *με* $\ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}$ **ποια είναι τα όρια :**

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)),\ \lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)),\ \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)),\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},\ \lim_{x\to x_0}(f(x))^{\nu},\ \lim_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}$$

Απάντηση

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\ell_1+\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x))=k\ell_1$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\ell_1\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\nu}=\ell_1^{\nu}$

$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$.

14.Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής ; Ποιο είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε $\boldsymbol{x_0\in A}$ *ισχύει* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

15. Συμπληρώστε τα κενά : $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=.....$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=.....$,

$\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon\varphi x=.....$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\varphi x=.....$,

$\lim\limits_{x\to x_0}e^{x}=.....$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ell n x=.....$.

Απάντηση

$\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$,

$\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\varphi x=\sigma\varphi x_0$,

$\lim\limits_{x\to x_0}e^{x}=e^{x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ell n x=\ell n x_0$

16. Έστω f μια συνάρτηση και ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής της παράστασης C. Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο A ;

Απάντηση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$.

17.Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0;

Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\mathbf{x_0}$ του πεδίου ορισμού της. αν ,το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός και ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0**, *συμβολίζεται με $f'(x_0)$: Δηλαδή $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$*

18.Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς το x, όταν $x=x0$;

Απάντηση

Η παράγωγος της f στο x_0($f'(x_0)$)εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** *του $y=f(x)$ ως προς το x, όταν $x=x_0$.*

19.Τι ονομάζεται παράγωγος μια συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A ;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x\in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x\in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f'}$.

20.Τι ονομάζεται δεύτερη παράγωγος μια συνάρτησης f;

Απάντηση

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** *της f και συμβολίζεται με f''.*

21.Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι 0 δηλαδή ότι $(c)'=0$.

Απόδειξη

Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $\quad f(x+h)-f(x)=c-c=0$

και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,\quad \text{οπότε } \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

Άρα $\quad \mathbf{(c)'=0}$.

22.Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι 1 δηλαδή ότι $(x)'=1$.

Απόδειξη

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$. Άρα $\mathbf{(x)'=1}$.

23.Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $2x$ δηλαδή ότι $(x^2)' = 2x$.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. *Έχουμε*

$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h$,

και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(2x+h)h}{h} = 2x+h$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$.

Άρα $\mathbf{(x^2)' = 2x}$

24.Να αποδείξετε ότι : η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ είναι $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. *Έχουμε*

$f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$,

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = .$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Άρα $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

25.Ποιες είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων ημx , συνx , e^x , ln$x$(x>0) ;

Απάντηση

Για τις συναρτήσεις $f(x) = ημx$, $g(x) = συνx$

$\mathbf{(ημx)' = συνx}$. $\mathbf{(συνx)' = -ημx}$.

Για την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση, με βάση τον αριθμό e, αποδεικνύεται ότι

$\mathbf{(e^x)' = e^x}$ *και* $\mathbf{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$

26.Να αποδείξετε ότι $(c\ f(x))' = c\ f'(x)$.

Αποδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. *Έχουμε*

$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$, *και για* $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = cf'(x).$$

Άρα $\quad (c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$.

27.Να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Απόδειξη

Έστω η συναρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. *Έχουμε*

$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) \quad = (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))$,

και για $h \neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα $\quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

28.Ποιες είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x)\ g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(g(x))$;

Απάντηση

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

29.Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ (αντιστοίχως $f'(x) < 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τι συμπεραίνουμε για την μονοτονία της στο Δ ;

Απάντηση

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

30.Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x0$ ✤ (α, β) , $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β)

(αντιστοίχως $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο $(\alpha, x0)$ και $f'(x) > 0$ στο $(x0, \beta)$) τι συμπεραίνουμε για τα ακρότατα της f στο (α, β) ;

Απάντηση

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

31. Να αποδείξετε ότι : $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ **και** $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη

$$\text{Έχουμε : } f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)'(x) - (1)(x)'}{x^2} = \frac{0\cdot(x) - 1\cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\text{Άρα} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Έχουμε

$$f'(x) = (\varepsilon\varphi x)'$$

$$= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\text{Άρα} \qquad (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1.Τι εννοούμε με τον όρο στατιστική ;

Απαντηση

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

- *το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων*
- *τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους*
- *την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.*

2.Τι ονομάζεται πληθυσμός , δείγμα , και πότε ένα δείγμα θα ονομάζεται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού;

Απαντηση

Ενα σύνολο το οποιο θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. λέγεται **πληθυσμός** *.Καθε υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται* **δείγμα**

Ένα δείγμα θεωρείται **αντιπροσωπευτικό** *ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.*

3.Τι ονομάζονται στη στατιστική μεταβλητές και τι τιμές μίας μεταβλητής;

Απαντηση

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** *(variables) και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα X, Y, Z, B,... Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται* **τιμές της μεταβλητής**.

4.Πως διακρίνονται οι μεταβλητές ως προς τις τιμές τους;

Απαντηση

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

Σε **ποιοτικές** *ή* **κατηγορικές** *μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.*

Σε **ποσοτικές** *μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:*

-Σε **διακριτές** *μεταβλητές, που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές.*

-Σε **συνεχείς** *μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν αποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) .*

5.Τι καλείται απογραφή ; Αναφέρετε δυο μειονεκτήματά της .

Απαντηση

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή**

- Σε πολλές όμως περιπτώσεις η εξέταση όλων των μονάδων του πληθυσμού είναι δύσκολη ή ακόμα και αδύνατη

- Επίσης ο κόπος, ο χρόνος και τα έξοδα που χρειάζονται για τη διεξαγωγή μιας απογραφής είναι πολλές φορές αρκετά μεγάλα, ιδίως όταν ο πληθυσμός που εξετάζεται είναι αρκετά μεγάλος.

6. Έστω x1 < x2 < . . . < xκ , κ ≤ ν οι διαφορετικές τιμές μιας μεταβλητής Χ , ενός δείγματος μεγέθους ν .

Α . Πως ορίζονται :

α) Η (απόλυτη) συχνότητα (ν_i) της τιμής xi .

β) Η σχετική συχνότητα (fi) της τιμής xi .

γ) Η σχετική συχνότητα(%) της τιμής xi (fi %)

δ) Η αθροιστική συχνότητα (N_i) της τιμής xi (για ποσοτικές μεταβλητές).

ε) Η αθροιστική σχετική συχνότητα (F_i) της τιμής xi και το αντίστοιχο ποσοστιαίο μέγεθος (Fi %) .

Β . Συμπληρώστε τα κενά :

α) $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa$ = …… β) N_1 = ….. και F_1 = …..

γ) ….. = $N_i - N_{i-1}$ i = 2 , 3 , …, κ . δ) ….. = $F_i - F_{i-1}$, i = 2 , 3 , …, κ .

ε) N_κ = ….. και F_κ = …..

Απαντηση

Α. α) Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \le \nu$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** *ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.*

β) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** *f_i της τιμής x_i, δηλαδή*

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1,2,\ldots,\kappa .$$

γ) Τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i\%$, δηλαδή $f_i\% = 100 f_i$.

δ) **Αθροιστικές συχνότητες** *N_i εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.*

ε) **Αθροιστικές σχετικές συχνότητες** *F_i, οι οποίες εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i*

Β . *α) $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu$ β) $\nu_1 = N_1$, και $f_1 = F_1$,*

γ) $\nu_i = N_i - N_{i-1}$, i = 2 , 3 , …, κ . δ) $f_i = F_i - F_{i-1}$ i = 2 , 3 , …, κ .

ε) $N_\kappa = \nu_1 + \nu_2 + .. + \nu_k$ και $F_k = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k$.

7. <u>Να αποδείξετε ότι</u> για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες :

Ι . 0 ≤ f i ≤ 1 για i =1 , 2 , … , κ ΙΙ . $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$

Απόδειξη

Για τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, \ldots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

$$0 \le f_i \le 1, \quad i = 1,2,\ldots,\lambda \ (\text{αφού } 0 \le \kappa_i \le \nu)$$

$$\text{Α μελος}: f_1 + f_2 + \ldots + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

8. Τι ονομάζεται κατανομή συχνοτήτων μίας μεταβλητής με τιμές x1 , x2 ,..., xκ ;

Απαντηση

Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, v_i) *λέμε ότι αποτελεί την* **κατανομή συχνοτήτων** .

9. Πότε χρησιμοποιείται το ραβδόγραμμα ; Να δώσετε μία περιγραφή του.

Απαντηση

Το **ραβδόγραμμα** *χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής Χ αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα. Έτσι έχουμε αντίστοιχα το* **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** *και το* **ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. *Τόσο η απόσταση μεταξύ των στηλών όσο και το μήκος των βάσεών τους καθορίζονται αυθαίρετα.*

10. Πότε χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων; Να δώσετε μία περιγραφή του.

Απαντηση

Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων** *Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα με μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια υψώνουμε σε κάθε* x_i *(υποθέτοντας ότι* $x_1<x_2<...<x_\kappa$*) μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2(α). Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων* v_i *στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες* f_i*, οπότε έχουμε το* **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**.

11. Πότε χρησιμοποιείται το πολύγωνο συχνοτήτων; Να δώσετε μία περιγραφή του.

Απαντηση

Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) *ή* (x_i, f_i) *έχουμε το λεγόμενο* **πολύγωνο συχνοτήτων** *ή* **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, *αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε*

12.Πότε χρησιμοποιείται το κυκλικό διάγραμμα; Να δώσετε μία περιγραφή του.

Απαντηση

Το **κυκλικό διάγραμμα** *χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ,ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες* v_i *ή τις σχετικές συχνότητες* f_i *των τιμών* x_i *της μεταβλητής.*

13..Με τι είναι ίσο το τόξο *αi* ενός κυκλικού διαγραμματοσς που αντιστοιχεί στην τιμή x*i* ;

Απαντηση

Αν συμβολίσουμε με α_i *το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε:*

$$\alpha_i = \nu_i \frac{360^o}{\nu} = 360^o f_i \quad \text{για} \quad i = 1,2,\dots,\kappa \,.$$

14. Τι είναι το σημειόγραμμα ;

Απαντηση

Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα** *στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα.*

15.Τι είναι το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα ;

Απαντηση

Το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.

16. Τι είναι οι κλάσεις και τα όρια των κλάσεων ;
Τι είναι η κεντρική τιμή, το πλάτος και η συχνότητα μίας κλάσης ;

Απαντηση

Κλάσεις *λέγονται οι ομάδες που ταξινομούνται οι τιμές μιας μεταβλητής, ώστε κάθε τιμή να ανήκει σε μια κλάση.*

Όρια *των κλάσεων λέγονται τα άκρα των κλάσεων*

Κεντρική τιμή *μιας κλάσης λέγεται η τιμή του κέντρου της κλάσης*

Πλάτος *μιας κλάσης λέγεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο άκρο της κλάσης*

. Το πλήθος των παρατηρήσεων ν_i *που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση i καλείται* **συχνότητα της κλάσης** *αυτής ή* **συχνότητα της κεντρικής τιμής** x_i ,

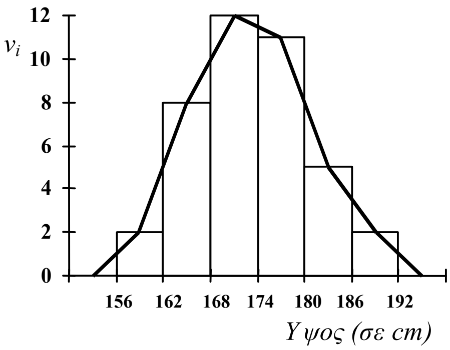
17. Τι είναι το ιστόγραμμα συχνοτήτων ; Πως κατασκευάζεται ; Τι είναι το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων ;

Απαντηση

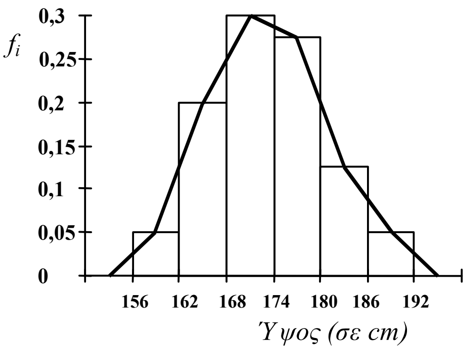
Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το **ιστόγραμμα** *συχνοτήτων. Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το* **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής**.

Θεωρώντας το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες. Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων βάζουμε τις συχνότητες.

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο *τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο* **πολύγωνο συχνοτήτων** *Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν. Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το* **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** *με εμβαδόν ίσο με 1,*

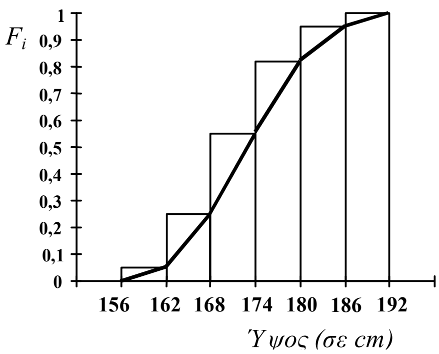


(α)



(β)

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** *και* **αθροιστικών σχετι-κών συχνοτήτων**. *Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα* **δεξιά άκρα** *(όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το* **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** *της κατανομής*



18. Ποια είναι η αριθμητική τιμή του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Απαντηση

Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν.

19 Τι ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων ;

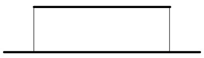
Απαντηση

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων**

20. Τι λέγεται ομοιόμορφη κατανομή και ποια η καμπύλη συχνοτήτων της ;

Απαντηση

Όταν οι παρατηρήσεις "κατανέμονται" ομοιόμορφα σε ένα διάστημα [α, β],), η κατανομή λέγεται **ομοιόμορφη**

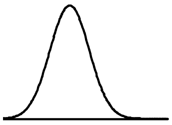


(α)

21 . Τι λέγεται κανονική κατανομή και ποια η καμπύλη συχνοτήτων της ;

Απαντηση

Η κατανομή (β), με "κωδωνοειδή" μορφή λέγεται **κανονική κατανομή** *(normal distribution) και παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική.*

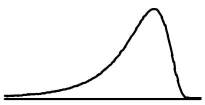


(β)

22. Ποιά κατανομή λέγεται ασύμμετρη; Ποια είναι τα είδη ασυμμετρίας ; Σχεδιάστε τις καμπύλες συχνοτήτων τους .

Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία($\bar{x} > \delta$) *όπως στην κατανομή (γ) ή αρνητική ασυμμετρία* ($\bar{x} < \delta$)*όπως στην κατανομή (δ).*

(γ)



(δ)

23.Τι καλούμε μέτρα θέσης ;

Απαντηση

Τα **μέτρα** *θεσης είναι αριθμητικά μεγέθη, που να μας δίνουν τη θέση του "κέντρου" των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα*

24 .Τι καλούμε μέτρα διασποράς ;

Απαντηση

Μέτρα διασποράς *ή* **μέτρα μεταβλητότητας** *είναι αριθμητικά μεγέθη που μας δινουν τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το "κέντρο" τους.*

25 .Τι καλούνται μέτρα ασυμμετρίας ;

Απαντηση

Μέτρα ασυμμετρίας *είναι αριθμητικα μεγεθη που καθορίζουν τη* **μορφή** *της κατανομής. Κατά πόσο δηλαδή η αντίστοιχη καμπύλη συχνοτήτων είναι συμμετρική ή όχι ως προς την ευθεία* $x = x_0$, *για δεδομένο σημείο* x_0 *του άξονα* $0x$. *Τα μέτρα αυτά εκφράζονται σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης και διασποράς.*

26. Πως ορίζεται η μέση τιμή μίας ποσοτικής μεταβλητής *X*, σε ένα δείγμα τιμών t_1 , t_2 , ... , t_ν μεγέθους ν ;

Απαντηση

Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους ν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι $t_1, t_2, ..., t_\nu$, *τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με* $\bar{x}$ *και δίνεται από τη σχέση:*

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$$

27. Πως εκφράζεται η μέση τιμή μίας ποσοτικής μεταβλητής *X*, σε ένα δείγμα τιμών x1 , x2 , ... , xκ μεγέθους ν , με αντίστοιχες συχνότητες ν1 ,ν2 ,..., νκ ;

Απαντηση

Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ *είναι οι τιμές της μεταβλητής Χ με συχνότητες* $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ *αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:*

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i$$

28. Τι ονομάζουμε σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο των τιμών x1 , x2 ,..., xν με συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) w1 ,w2 ,..., wν ;

Απαντηση

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα (έμφαση) στις τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$ *ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον* **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** *ή* **σταθμικό μέσο**. *Εάν σε κάθε τιμή* $x_1, x_2, ..., x_\nu$ *δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)* $w_1, w_2, ..., w_\nu$, *τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:*

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}.$$

29. Πως εκφράζεται η μέση τιμή μίας ποσοτικής μεταβλητής Χ , σε ένα δείγμα τιμών x1 ,x2 ,..., xκ , μεγέθους νaπό τις τιμές της μεταβλητής και τις σχετικές συχνότητές τους f1 , f2 , … , fκ ;

Απαντηση

Η μέση τιμή μίας ποσοτικής μεταβλητής Χ , σε ένα δείγμα τιμών x1 ,x2 ,..., xκ , μεγέθους νaπό τις τιμές της μεταβλητής και τις σχετικές συχνότητές τους f1 , f2 , … , fκ ;

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$$

30. Πως ορίζεται η διάμεσος (δ) ενός δείγματος *ν* παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά ;

Απαντηση

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός

31.Τι ονομάζεται εύρος ή κύμανση (R) μιας κατανομής ; Αναφέρατε ένα σημαντικό μειονέκτημά του .

Απαντηση

Το **εύρος** *ή* **κύμανση** *(R), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή:*

$$\text{Εύρος } R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση-Μικρότερη παρατήρηση}$$

Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο, που υπολογίζεται εύκολα δε θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς, γιατί **βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις**.

32.<u>Δείξτε ότι</u> ο αριθμητικός μέσος των αποκλίσεων των παρατηρήσεων ενός δείγματος από τη μέση τιμή του είναι ίσος με το μηδέν .

Απόδειξη

$$\frac{(\bar{x}-x_1)+(\bar{x}-x_2)+\ldots+(\bar{x}-x_\nu)}{\nu} = \frac{\nu\bar{x}-(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)}{\nu} = \bar{x} - \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)}{\nu} =$$

$$\bar{x}-\bar{x}=0$$

33.Τι ονομάζεται διακύμανση ή διασπορά (s^2) μιας κατανομής (σε ένα δείγμα τιμών t_1, t_2 ,..., t_ν μεγέθους ν);

Απαντηση

Διακύμανση *ή* **διασπορά** *των παρατηρήσεων* $t_1, t_2 t_3, \ldots, t_\nu$ *μιας μεταβλητής Χ καλείται ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των* t_i *από τη μέση τιμή τους* $\bar{x}$ *,ορίζεται από τη σχέση*

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$$

34.Αναφέρατε ένα σημαντικό μειονέκτημα της διακύμανσης εξαιτίας του οποίου προτιμάμε την θετική ρίζα της .

Απάντηση

Η διακύμανση είναι μια αξιόπιστη παράμετρος διασποράς, αλλά έχει ένα μειονέκτημα. Δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm, η διακύμανση εκφράζεται σε cm^2 *. Αν όμως πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού, όπως ακριβώς είναι και όλα τα άλλα μέτρα θέσης, που εξετάσαμε έως τώρα*

35.Τι ονομάζεται τυπική απόκλιση (s) μιας κατανομής ;

Απάντηση

Η ποσότητα αυτή λέγεται **τυπική απόκλιση** *,συμβολίζεται με s και δίνεται από τη σχέση:* $s = \sqrt{s^2}$

36. Αν η μεταβλητή *Χ* ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή ($\bar{x}$) και τυπική απόκλιση (s) , να αναφέρετε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκεται στο διάστημα

i) $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ **ii)** $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ **iii)** $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

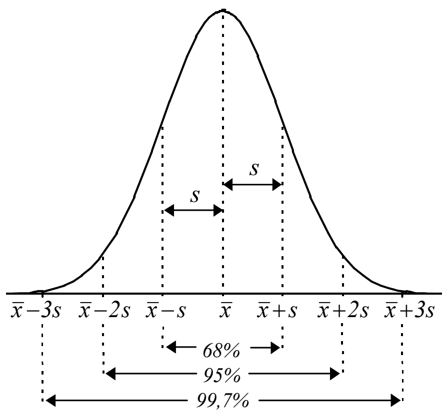
Απαντηση

αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i) *το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα*
$(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$

ii) *το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα*
$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$

iii) *το 99,7% περίπου των παρατη-ρήσεων βρίσκεται στο διάστημα*
$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$



37. Ποιο είναι κατά προσέγγιση το εύρος R μίας κανονικής κατανομής ;

Απαντηση

Το εύρος εύρος R μίας κανονικής κατανομής ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.

38. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας CV ;

Απαντηση

Ένα μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής** *ή* **συντελεστής μεταβλητότητας** *ο οποίος ορίζεται από το λόγο:*

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} \cdot 100\% = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

39.Πως συγκρίνονται ως προς την ομοιογένεια δύο δείγματα *Α, Β* με βάση τους συντελεστές μεταβολής ;

Απαντηση

Θα λέμε ότι το δείγμα Α έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από ένα δείγμα Β , όταν :

$$CV_A < CV_B$$

40.Πότε ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές ;

Απάντηση

ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

41.Από τα $\overline{x}$, δ , s , s^2, R ποια είναι μέτρα θέσης και ποια μέτρα διασποράς ;

Απάντηση

Τα μέτρα διασποράς είναι:

- *Το εύρος R*
- *Η διακύμανση* s^2
- *Η τυπική απόκλιση s*

Τα μέτρα θέσης είναι:

- *Η μέση τιμή* $\overline{x}$
- *Η διάμεσος δ*

42. α) *Αν* $y_i = x_i + c$ *τότε* : $\overline{y} = \dots$ *και* $S_y = \dots$

β) *Αν* $y_i = \lambda x_i$ *τότε* : $\overline{y} = \dots$ *και* $S_y = \dots$

Απάντηση

α) $\overline{y} = \overline{x} + c$, $s_y = s_x$

β) $\overline{y} = c\,\overline{x}$, $s_y = |c|\, s_x$

43. Αποδείξτε τους παρακάτω τύπους : $s^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left(\overline{x}\right)^2$ **για ένα δείγμα τιμών x1 ,x2 ,..., xκ μεγέθους ν , με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες f1 , f2 , ... , fκ .**

Απόδειξη

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\nu}=\frac{\nu_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\nu_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\nu_k\left(x_k-\bar{x}\right)^2}{\nu}=\frac{\nu_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\nu_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\nu_k\left(x_k-\bar{x}\right)^2}{\nu}=$$

$$\frac{\nu_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2}{\nu}+\frac{\nu_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2}{\nu}+..+\frac{\nu_k\left(x_k-\bar{x}\right)^2}{\nu}=\frac{\nu_1}{\nu}\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\frac{\nu_2}{\nu}\left(x_2-\bar{x}\right)^2+..+\frac{\nu_k}{\nu}\left(x_k-\bar{x}\right)^2=$$

$$f_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2+f_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2+..+f_k\left(x_k-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}.=\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\frac{\nu_i}{\nu}-\frac{1}{\nu}\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}=\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2f_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i\right)^2}{\nu^2}=$$

$$\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2f_i-\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\frac{x_i\nu_i}{\nu}\right)^2=\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2f_i-\left(\bar{x}\right)^2$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

1. Πότε ένα πείραμα λέγεται πείραμα τύχης και πότε αιτιοκρατικό ;

Απάντηση

Ένα πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** *πείραμα.*

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** .

2 . α)Τι λέγεται δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης ;
β)Τι λέμε δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις ενός πειράματος τύχης ;

Απάντηση

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** *και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.*

3. Τι λέγεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ;

Απάντηση

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** *ή γεγονός.*

4. Τι λέγεται απλό και τι σύνθετο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ;

Απάντηση

Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** *όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και* **σύνθετο** *αν έχει περισσότερα στοιχεία.*

5. Πότε λέμε ότι ένα ενδεχόμενο Α ενός πειράματος τύχης πραγματοποιείται ή συμβαίνει σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του πειράματος ;

Απάντηση

Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** *ή* **συμβαίνει**.

6.Τι ονομάζονται ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίησή ενός ενδεχομένου;

Απάντηση

Τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** *για την πραγματοποίησή του.*

7.**Ποιο είναι το βέβαιο και ποιο το αδύνατο ενδεχόμενο ;**

Απάντηση

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. *Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι'αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το* **αδύνατο ενδεχόμενο**.

8. Αν *Α* είναι ένα ενδεχόμενο τι συμβολίζει το Ν(Α) ;

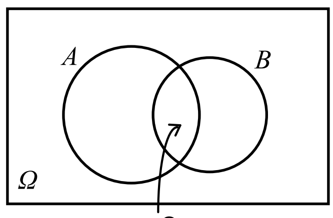
Απαντηση

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου Α θα το συμβολίζουμε με $N(A)$.

9. Πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A\cap B$; Να παραστήσετε το $A\cap B$ σε ένα διάγραμμα Venn .

Απαντηση

Το ενδεχόμενο $A\cap B$, που διαβάζεται "Α τομή Β" ή "Α και Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και

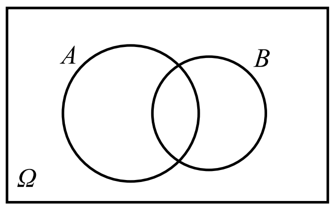


$A\cap B$

10. Πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A\cup B$; Να παραστήσετε το $A\cup B$ σε ένα διάγραμμα Venn.

Απαντηση

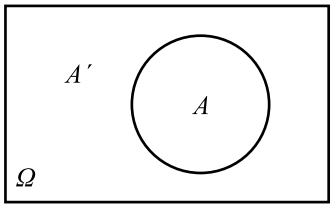
Το ενδεχόμενο $A\cup B$, που διαβάζεται "Α ένωση Β" ή "Α ή Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.



$A\cup B$

11. Πότε πραγματοποιείται το αντίθετο ενδεχόμενο Α′ του Α ; Να παραστήσετε το A' σε ένα διάγραμμα Venn.

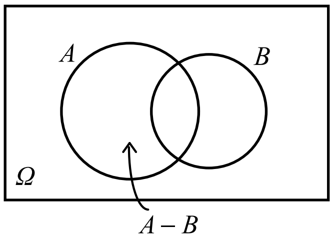
Απαντηση



Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται "όχι Α" ή "συμπληρωματικό του Α" και πραγματο-ποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το Α. Το A' λέγεται και "αντίθετο του Α".

12.Πότε πραγματοποιείται η διαφορά Α−Β του Β από το Α ;Να παραστήσετε το $A - B$ σε ένα διάγραμμα Venn.

Απαντηση



Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται "διαφορά του Β από το Α" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.

13. Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους ;

Απαντηση

Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα η ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα, όταν $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$.

14 .Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου Α ;

Απαντηση

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται σχετική συχνότητα του Α και συμβολίζεται με f_A.

15.Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$δειγματικός χώρος και τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\dots,\{\omega_\lambda\}$ τα οποία πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\lambda$ φορές αντίστοιχα σε ν εκτελέσεις του πειράματος με σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_\lambda$. <u>Δείξτε ότι</u> $f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = 1$.

Αποδειξη

Από τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, \dots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

16.Τι ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών ;

Απαντηση

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** *ή* **νόμος των μεγάλων αριθμών**.

17.Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας .

Απαντηση

Σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$. *Γι'αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:*

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

18. Πως από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι
$P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$, $0\leq P(A)\leq 1$;

Απαντηση

Από τον κλασικο ορισμό της πιθανοτητας προκύπτει ότι:

1. $P(\Omega)=\dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$
2. $P(\varnothing)=\dfrac{0}{N(\Omega)}=0$
3. *Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0\leq P(A)\leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.*

19. Να δώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας .

Απαντηση

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0\leq P(\omega_i)\leq 1$
- $P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)=1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}\neq\varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing)=0$.

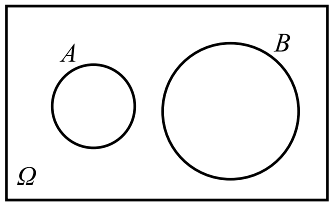
20. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύε ο απλός προσθετικός νόμος : P(A ∪ B) = P(A) + P(B)

Αποδειξη

Αν $N(A)=\kappa$ *και* $N(B)=\lambda$, *τότε το* $A\cup B$ *έχει* $\kappa+\lambda$ *στοιχεία, γιατί αλλιώς τα Α και Β δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε* $N(A\cup B)=\kappa+\lambda=N(A)+N(B)$.

Επομένως:

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}.=P(A)+P(B).$$



$A\bigcup B$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** *(simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε* $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$.

21. <u>Να αποδείξετε</u> ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα *Α* και *Α′* ισχύει : P(A′) = 1– P(A) .

Αποδειξη

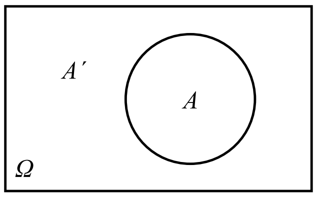
Επειδή $A\cap A'=\varnothing$, *δηλαδή τα Α και Α′ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:*

$$P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

$$P(\Omega)=P(A)+P(A')$$

$$1=P(A)+P(A').$$

Οπότε $P(A')=1-P(A)$.



22 . **<u>Να αποδείξετε</u>** *ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ισχύει* **<u>ο προσθετικός νόμος</u>** *:*

$$P(A\bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

Αποδειξη

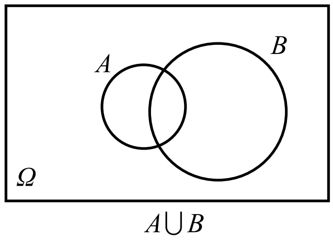
Για δυο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B),\quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ *το πλήθος των στοιχείων του* $A\cap B$ *υπολογίζεται δυο φορές.*

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ *έχουμε:*

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$



$A\bigcup B$

και επομένως

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος**

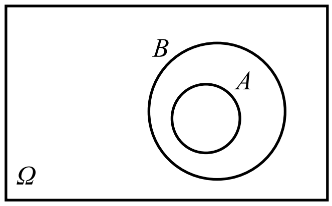
23 . **Να αποδείξετε** *ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα* A *και* B *με* $A \subseteq B$ *ισχύει :* $P(A) \leq P(B)$.

Αποδειξη

Επειδή $A \subseteq B$ *έχουμε διαδοχικά:*

$N(A) \leq N(B)$ $\quad \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \dfrac{N(B)}{N(\Omega)}$

$P(A) \leq P(B)$.



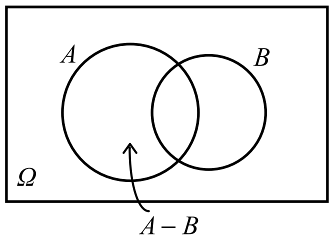
24 . **Να αποδείξετε** *ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα* A *και* B *ισχύει :* $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Αποδειξη

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ *και* $A \cap B$ *είναι ασυμβίβαστα και* $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, *έχουμε:*

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

Άρα $\quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.



25 . Αποδείξτε ότι : *α)* $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

β) $P(A \cap B)' = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$

γ) $\max\{P(A), P(B)\} \leq P(A \cup B) \leq \min\{1, P(A) + P(B)\}$

δ) $\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$

ε) Αν $P(A) + P(B) > 1$ τότε Α , Β όχι ασυμβίβαστα .

Απόδειξη

α) $A - B, B - A$ *ξένα μεταξύ τους άρα από τον προσθετικό νόμο :*

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

β)

$$P((A \cap B)') = 1 - P((A \cap B)) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B)) =$$

$$1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$$

γ)

$$\left.\begin{array}{l} B \subseteq A \cup B \Leftrightarrow P(B) \leq P(A \cup B) \\ A \subseteq A \cup B \Leftrightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \end{array}\right\} \Leftrightarrow Max\{P(B), P(A)\} \leq P(A \cup B)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)\leq P(A)+P(B) \\ P(A\cup B)\leq 1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B)\leq Min\{1,P(A)+P(B)\}$$

δ)) $max\{0, P(A)+P(B)-1\} \leq P(A\cap B) \leq min\{P(A), P(B)\}$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subseteq A\Leftrightarrow P(A\cap B)\leq P(A) \\ A\cap B\subseteq B\Leftrightarrow P(A\cap B)\leq P(B) \end{array}\right\}\Leftrightarrow Min\{P(B),P(A)\}\geq P(A\cap B)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)\leq 1\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1\Leftrightarrow P(A)+P(B)-1\leq P(A\cap B) \\ P(A\cap B)\geq 0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow max\{0, P(A)+P(B)-1\}\leq P(A\cap B)$$

ε) Αν $P(A)+P(B)>1$ *τότε Α , Β όχι ασυμβίβαστα*
Αν Α, Β ασυμβιβαστα τοτε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)>1$ *ατοπο αρα Α , Β όχι ασυμβίβαστα*